

# Chapitre 1 : La puissance d'un nombre

## 1 La puissance positive d'un nombre

### Définition 1.

Soit un nombre relatif  $a$  et soit  $n$  un entier positif, le produit  $\underbrace{a \times a \times \dots \times a \times a}_{n \text{ fois}}$  s'écrit  $a^n$ .

### Exemples.

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{6 \text{ fois}} = 3^6 = 729$$

$$\underbrace{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}_{7 \text{ fois}} = 6^7 = 279936$$

### Remarques.

$5^7$  se lit « 5 exposant 7 » et 7 est appelé « l'exposant ».

$5^7$  est appelé « puissance 7-ième de 5 ».

### Exemples.

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{5 \text{ fois}} = 3^5 = 243$$

$$\underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}_{\dots \text{ fois}} = 7^6 = 117649$$

$$\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}_{\dots \text{ fois}} = 5^7 = 78125$$

$$\underbrace{(-6) \times (-6) \times (-6)}_{\dots \text{ fois}} = (-6)^3 = -216$$

On peut calculer le résultat en utilisant la touche de la calculatrice suivante :



Le résultat peut dépasser les capacités de la calculatrice et il n'est pas toujours utile de connaître le résultat exact.

$$\underbrace{7 \times 7 \times \dots \times 7}_{100 \text{ fois}} = 7^{100} \\ = 3234476509624757991344647769100216810857203198904625400933895331391691459636928060001$$

**Remarques.** Soit  $a$  un nombre quelconque non nul, alors

$$a^0 = 1.$$

$$a^1 = a.$$

$$a^2 = a \times a \text{ et se lit « a au carré ».}$$

$$a^3 = a \times a \times a \text{ et se lit « a au cube ».}$$

## 2 Opérations avec les puissances positives

**Exemples.** Ecrire les nombres suivants sous forme de puissance (en passant par la définition) :

$$\begin{aligned}7^3 \times 7^7 &= 7 \times 7 = 7^{3+7} = 7^{10} (2^3)^5 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \\ &= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \\ &= 2^{3 \times 5} = 2^{15}\end{aligned}$$

$$5^7 \times 5^3 = 5^{7+3} = 5^{10}$$

$$(5^4)^7 = 5^{4 \times 7} = 5^{28}$$

$$7^3 \times 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$$

$$(15^{17})^3 = 15^{17 \times 3} = 15^{51}$$

On peut donc en déduire les formules générales suivantes :

### Propriété 1.

Pour tout nombre non nul  $a$  et pour tout entiers relatifs  $m$ ,  $n$  et  $p$ , on a :

1.  $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2.  $(a^n)^p = a^{n \times p}$

# Exercices : chapitre 1 La puissance d'un nombre

**Exercice 1.** Ecrire chaque expression sous la forme d'un produit de facteurs.

$$\begin{aligned}5^2 &= 5 \times 5 = 25 & 9^3 &= 9 \times 9 \times 9 = 729 \\3^4 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 & 23^3 &= 23 \times 23 \times 23 = 12167 \\5^7 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 78125 & 91^5 &= 91 \times 91 \times 91 \times 91 \times 91 = 6\,240\,321\,451 \\6^7 &= 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 279936 & 17^7 &= 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 = 410\,338\,673\end{aligned}$$

**Exercice 2.** Pour chacun des nombres ci-dessous, écrire les nombres sous la forme d'une puissance  $a^n$  où  $a$  est le plus petit entier possible.

$$\begin{aligned}2 &= 2^1 & 512 &= 2^9 \\27 &= 3^3 & 243 &= 3^5 \\32 &= 2^5 & 625 &= 5^4 \\125 &= 5^3 & 16807 &= 7^5\end{aligned}$$

**Exercice 3.** Ecrire les nombres suivants sous forme de puissance :

$$\begin{aligned}4^3 \times 4^7 &= 4^{10} & (7^4)^7 &= 7^{28} \\15^7 \times 15^3 &= 15^{10} & 5^{17} \times 5^3 &= 5^{20} \\19^3 \times 19^5 &= 19^8 & (7^2)^5 &= 7^{10} \\(11^3)^5 &= 11^{15} & (15^7)^3 &= 15^{21}\end{aligned}$$

**Exercice 4.** Ecrire les nombres suivants sous forme de puissance :

$$\begin{aligned}4^3 \times 4^6 &= 4^9 & (7^7)^7 &= 7^{49} \\5^2 \times 5^5 &= 5^7 & 5^7 \times 5^3 &= 5^{10} \\9^{13} \times 9^5 &= 9^{18} & (7^7)^5 &= 7^{35} \\(1^{31})^{25} &= 1 & (15^5)^3 &= 15^{15}\end{aligned}$$

**Exercice 5.** Pour mener une expédition contre la termitière voisine, la reine des fourmis lève une armée. Elle nomme un général qui choisit cinq colonels, qui prennent chacun cinq capitaines qui prennent chacun cinq lieutenants qui prennent chacun cinq sergents qui choisissent chacun 25 soldats.

1. Montre que le nombre total de soldats est une puissance de 5.
2. Calcule l'effectif total de cette armée.
3. La reine des termites, elle, lève une armée dont l'effectif est une puissance de 10. Quel est l'exposant minimum de cette puissance pour que les termites soient plus nombreux que les fourmis ?

**Exercice 6.** Lors d'un jeu de « Quitte ou double », la première réponse rapporte 1 €, ensuite chaque bonne réponse permet de doubler son gain.

4. Gilles a répondu correctement à une série de sept questions. Quel est son gain ?
5. Combien d'argent gagnera-t-il en répondant correctement à une série de dix questions ?